

9.2.11 Ověřování hypotéz

Předpoklady: 9210

- Testování nového léku: Někteří nemocní se uzdraví i při klasické léčbě. Jde u konkrétního uzdravení o zásluhu nového léku nebo testovaný patřil mezi šťastné, kteří by se uzdravili i bez něj?
- Senzibil hledá zakopaný poklad: Najde ho opravdu kvůli svým nadpřirozeným schopnostem nebo jde pouze o náhodu?
- Odborník na vína určuje značky podle chuti: Pozná je díky svým trénovaným chuťovým pohárkům nebo jde jen o náhodu?

Ve všech uvedených případech můžeme kvalifikovaně rozhodnout teprve poté, co si spočteme, s jakou pravděpodobností můžeme výsledku dosáhnout pouze pomocí náhody.

Př. 1: Senzibil tvrdí, že dokáže pomocí virgule najít v zemi zakopaný zlatý poklad. Jeho schopnosti jsou testovány dvojitým slepým pokusem. Na zorané zahradě jeden z členů pokusného týmu zakope poklad, zapíše do dokumentace jeho umístění a odejde pryč. Povrch zahrady je zarovnan a pak přijde senzibil s druhým členem pokusného týmu a označí místo zakopání pokladu. Zahrada je rozdělena na 50 čtverců, poklad je zakopán vždy do středu jednoho z nich a senzibil je považován za úspěšného v případě, že označí správný čtverec. Proč nedoprovází senzibila stejný člen pokusného týmu, který zakopal poklad? Jaká je pravděpodobnost, že místo umístění pokladu náhodně uhádne i člověk bez zvláštních schopností? Jaká je pravděpodobnost, že senzibil najde poklad náhodně:
a) alespoň dvakrát ze tří pokusů, b) alespoň třikrát z pěti pokusů?

Senzibila nesmí vyprovázet člověk, který zná umístění pokladu proto, aby senzibil nemohl z jeho chování poznat, zda se nachází ve čtverci s pokladem nebo ve čtverci bez pokladu.

Pravděpodobnost náhodného určení správného čtverce: $P(Z) = \frac{1}{50}$.

Pravděpodobnost náhodného určení nesprávného čtverce: $P(N) = \frac{49}{50}$.

a) pravděpodobnost náhodného nalezení alespoň dvakrát ze tří pokusů

Najdeme poklad náhodně alespoň dvakrát ze tří pokusů:

- právě dvakrát: $P(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2 \left(\frac{49}{50}\right)$,
- právě třikrát: $P(3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{50}\right)^3$,

celkově: $P(A) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2 \left(\frac{49}{50}\right) + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{50}\right)^3 \doteq 0,00118$.

b) alespoň třikrát z pěti pokusů

Najdeme poklad náhodně alespoň třikrát z pěti pokusů:

- právě třikrát: $P(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{50}\right)^3 \left(\frac{49}{50}\right)^2$,
- právě čtyřikrát: $P(4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{50}\right)^4 \left(\frac{49}{50}\right)^1$,
- právě pětkrát: $P(5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{50}\right)^5$,

celkově: $P(B) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{50}\right)^3 \left(\frac{49}{50}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{50}\right)^4 \left(\frac{49}{50}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{50}\right)^5 \doteq 7,76 \cdot 10^{-5}$.

V obou případech je pravděpodobnost náhodného uhádnutí pokladu velmi nízká. V bodu b), kde připouštíme více chyb, překvapivě nižší než v bodě a).

Pedagogická poznámka: Opět někteří zapomenou, že kromě pravděpodobností nalezení musí v jednotlivých variantách pracovat s pravděpodobnostmi nenalezení pokladu

a píší výrazy typu $P(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2$.

Př. 2: Za normálních okolností je pravděpodobnost onemocnění slepic hypoglynní osperotázou 0,3. Na původně n zdravých kusech testujeme účinnost nové vakcíny. Urči pravděpodobnost, že infekce zůstane ušetřeno i v případě, že je vakcína zcela neúčinná: a) 7 slepic ze 7; b) 10 slepic z 10;
c) alespoň 19 slepic z 20; d) alespoň 28 slepic z 30.

Analogický postup jako v předchozím příkladu.

a) infekci nedostane 7 slepic ze 7

$$P(A) = \binom{7}{7} 0,7^7 \doteq 0,0824$$

b) infekci nedostane 10 slepic z 10

$$P(B) = \binom{10}{10} 0,7^{10} \doteq 0,0282$$

c) infekci nedostane alespoň 19 slepic z 20

$$P(C) = \binom{20}{19} \cdot 0,7^{19} \cdot 0,3^1 + \binom{20}{20} \cdot 0,7^{20} \doteq 0,00764$$

d) infekci nedostane alespoň 28 slepic z 30

$$P(D) = \binom{30}{28} \cdot 0,7^{28} \cdot 0,3^2 + \binom{30}{29} \cdot 0,7^{29} \cdot 0,3^1 + \binom{30}{30} \cdot 0,7^{30} \doteq 0,00211$$

Stejně jako u předchozího příkladu je vidět, jak s počtem testovaných klesá pravděpodobnost náhodného dosažení potřebných výsledků.

Př. 3: Na xendilogózu humperlich umírá průměrně každý pátý nakažený. Jaký nejvyšší počet ze třiceti zkoumaných pacientů může i přes podání léku zemřít, aby pravděpodobnost, že jde o náhodu a nový lék je zcela neúčinný, byla menší než 2%?

Budeme postupně počítat pravděpodobnosti s nejvyššími počty uzdravených a sčítat jejich pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost uzdravení: $P(Z) = \frac{4}{5}$, pravděpodobnost smrti $P(N) = \frac{1}{5}$.

Pravděpodobnosti budeme označovat podle počtu zemřelých.

Uzdraví se všichni nakažení (nikdo nezemře): $P(0) = \binom{30}{30} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{30} \doteq 0,00124$.

Neuzdraví se nejvýše jeden pacient: $P(1) = \binom{30}{30} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{30} + \binom{30}{29} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{29} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \doteq 0,0105$.

Neuzdraví se nejvýše dva pacienti:

$P(2) = \binom{30}{30} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{30} + \binom{30}{29} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{29} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{30}{28} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{28} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \doteq 0,0442$. To už je více, než jsme chtěli.

Při testování může zemřít nejvýše jeden pacient, aby pravděpodobnost, že se pacienti uzdravili a lék je neúčinný, byla menší než 2%.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro studenty těžký zejména tím, že nemají v zadání přesně předepsáno, jak mají postupovat. Navíc postup, který nevede ke konečnému přesnému výsledku, ale spočívá na postupném zkoušení, jde zcela proti jejich školní zkušenosti.

Př. 4: Václav P. z 4.2011 se považuje za znalce plnotučného UHT mléka v tetrapackových krabicích. Spolužáci mu připravili sedm kusů z různých mlékáren, jeho úkolem je ke každému mléku přiřadit jeho výrobce. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně uhádne:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| a) všechny výrobce, | b) jednou se zmýlí, |
| c) zmýlí se právě dvakrát, | d) zmýlí se maximálně třikrát? |

Přiřazení mlék k jejich výrobci $\Rightarrow$ musíme vytvořit jedno správné pořadí $\Rightarrow 7!$ možných výsledků. Určované pravděpodobnosti označujeme podle počtu chyb.

a) pravděpodobnost, že uhádne všechny výrobce

Jedna jediná příznivá možnost $\Rightarrow$ pravděpodobnost $P(0) = \frac{1}{7!} \doteq 1,98 \cdot 10^{-4}$ (náhoda je prakticky vyloučena).

b) pravděpodobnost, že se jednou zmýlí

Vytváříme pořadí $\Rightarrow$ nemůžeme umístit špatně jenom jedno mléko (zmýlíme se minimálně ve dvou, jejichž umístění prohodíme) $\Rightarrow P(1) = \frac{0}{7!} = 0$.

c) pravděpodobnost, že se zmýlí právě dvakrát

Zmýlíme se právě dvakrát $\Rightarrow$ prohodíme mezi sebou dvě mléka:

- $\binom{7}{2}$ možností, jak vybrat mléka, která prohodíme,
- 1 možnost, jak mléka mezi sebou prohodit,

$$\Rightarrow P(2) = \frac{\binom{7}{2} \cdot 1}{7!} \doteq 4,17 \cdot 10^{-3}.$$

d) pravděpodobnost, že se zmýlí maximálně třikrát

Nejdříve určíme pravděpodobnost, jak se zmýlí právě třikrát $\Rightarrow$ prohodíme mezi sebou tři mléka, takže žádné nezůstane na svém správném místě:

- $\binom{7}{3}$ možností, jak vybrat mléka, která prohodíme,
- 2 možnosti, jak tři mléka mezi sebou prohodit, aby žádné nebylo na svém místě (označíme-li je A, B, C, a je-li ABC správné pořadí, zbývají nám z šesti možností prohazování mlék ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA jen dvě BCA a CAB, kdy žádné z mlék není na svém místě,

$$\Rightarrow P(3) = \frac{\binom{7}{3} \cdot 2}{7!} \doteq 0,0139.$$

$$P(D) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \doteq 1,98 \cdot 10^{-4} + 0 + 4,17 \cdot 10^{-3} + 0,0139 \doteq 0,0183$$

Pokud se Vašek zmýlí maximálně třikrát, je velmi pravděpodobné, že je opravdovým znalcem UHT mléka, protože pravděpodobnost, že by takto určil výsledky náhodně, je pouze 0,0183.

Pedagogická poznámka: Není reálné očekávat, že by studenti dokázali předchozí příklad vyřešit sami (maximálně určí počet všech možných výsledků), proto řešíme příklad napůl společně.

Shrnutí: Hypotézy o funkčnosti můžeme ověřovat tím, že si určíme pravděpodobnost náhodného úspěchu.